Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

(Ι) Ομοιόμορφη Κατανομή

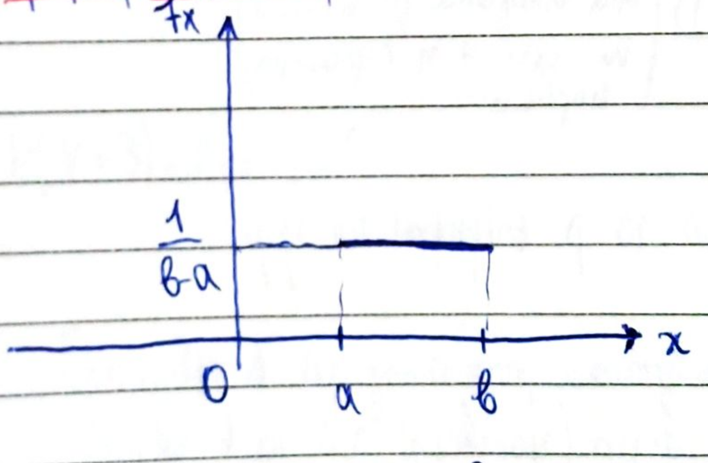
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται ομοιόμορφη στο διάστημα (α,β) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\leq\beta$ αν οι δυνατές τιμές της τ.μ X είναι $x\in(\alpha,\beta)$ και η σ.π.π της τ.μ X δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & x\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Συμβολισμός: $X\sim U(\alpha,\beta)$

Γραφική παράσταση

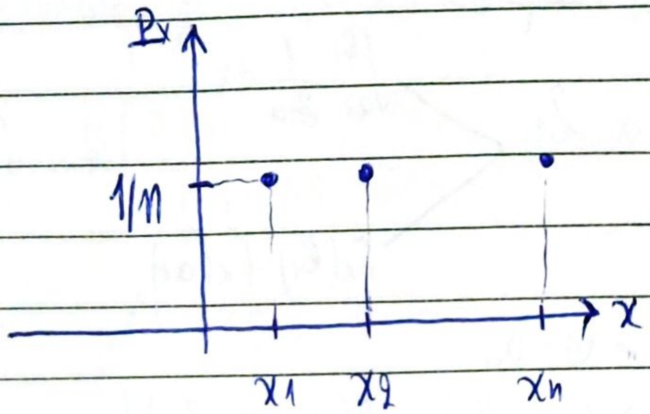


Σύνδεση με Ομοιόμορφη διακριτή Κατανομή

Έστω η διακριτή τ.μ X με τιμές $x_1,\dots,x_n$ και σ.π $P_X(x_i)=\dfrac{1}{n}$, $\forall i=1,\dots,n$

(π.χ η τ.μ X που παριστά το αποτέλεσμα μιας ρίψης ζαριού. Τότε $x=1,\dots,6$ και $P_X(x)=\frac{1}{6}$, $\forall x$)

Μια τ.μ X όπως η παραπάνω λέγεται ομοιόμορφη διακριτή.

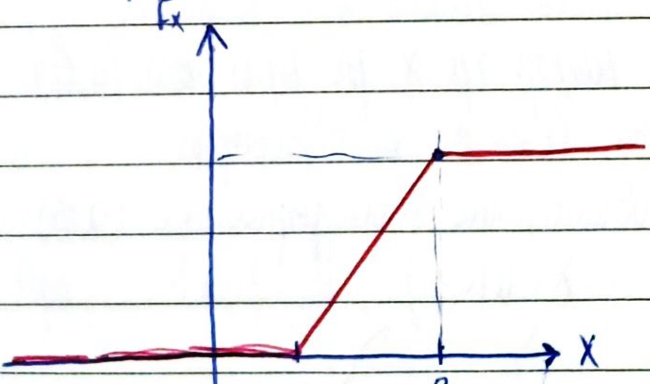


ραβδόγραμμα

Ιδιότητες της ομοιόμορφης

Αν η τ.μ $X \sim U(a,b)$ τότε $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \le x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$

Γραφική παράσταση της ασκ. F_X



$$F_X(x) \overset{op.}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & , x \le a \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \overset{0}{f_X(t)}\,dt + \int_{a}^{x} \overset{\frac{1}{b-a}dt}{f_X(t)\,dt} = \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ \int_{-\infty}^{a} \overset{0}{f_X(t)}\,dt + \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt + \int_{b}^{x} \overset{0}{f_X(t)}\,dt = \frac{b-a}{b-a} = 1 & , x \ge b \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Έστω η τμ $X \sim U(a,b)$. Τότε υποδιαστήματα του (a,b) και μήκους έχουν ίσες πιθανότητες με την έννοια:

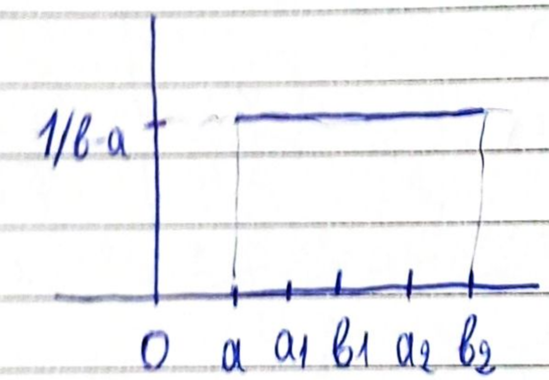
Αν $a_i, b_i \in (a,b)$, $i=1,2$ με $a_i < b_i$ και $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ τότε:

$$P(a_1 < X \le b_1) = P(a_2 \le X \le b_2)$$

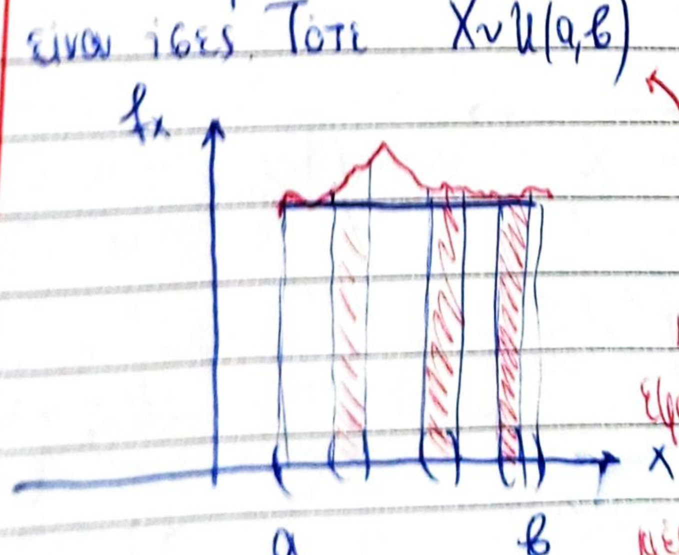
Είναι $P(a_1 < X \le b_1)$: $\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{b-a}\,dx$, $F_X(b_1) - F_X(a_1)$

Όμως $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$

Προφανώς $P(a_1 \le X \le b_1) = P(a_2 < X \le b_2)$

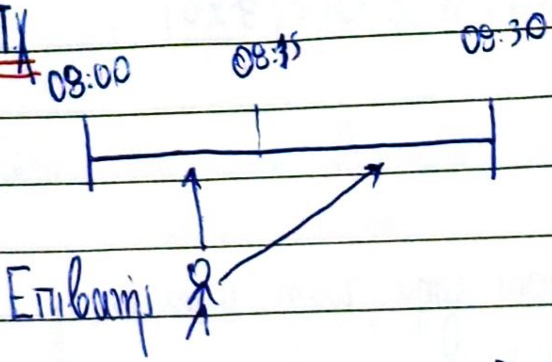


Αντίστροφα, έστω συνεχής τμ X με τιμές στο (a,b) δηλ. $X \in (a,b)$ και έστω ότι οι πιθανότητες οποιουδήποτε υποδιαστημάτων ίσου μήκους του (a,b) είναι ίσες. Τότε $X \sim U(a,b)$



Πολύ σημαντική ιδιότητα γιατί καθορίζει το πλαίσιο εφαρμογής της $U(a,b)$ και μοντέλο αφίξεων αυτοκινήτων μέσα σε στάση ή ανθρώπων σε ραντεβού.

Πχ



Λεωφορείο φθάνει στη στάση κάθε 15 λεπτά.

α) $P\left(\begin{array}{l}\text{ο επιβάτης να περιμένει} \\ \text{λιγότερο από 5min}\end{array}\right) = P(08{:}10 < X < 08{:}15 \text{ ή } 08{:}25 < X < 08{:}30) =$

β) $P\left(\begin{array}{l}\text{ο επιβάτης να περιμένει} \\ \text{περισσότερο από 10min}\end{array}\right)$

ΛΥΣΗ

Έστω X η χρονική στιγμή που ο επιβάτης φθάνει στη στάση

Το X παίρνει τιμές από $(08{:}00, 08{:}30)$

Άρα X συνεχής

Έχω κάποιο λόγο να πιστεύω ότι η πιθανότητα να φθάσει σε ένα υποδιάστημα είναι διαφορετική από την πιθανότητα να φθάσει σε ένα άλλο υποδιάστημα ίσου μήκους? ΟΧΙ αφού τυχαία φθάνει σε κάποια χρονική στιγμή. Άρα $X \sim U(08{:}00, 08{:}30)$

Άρα, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8{:}30 - 8{:}00}, & 8{:}00 < x < 8{:}30 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

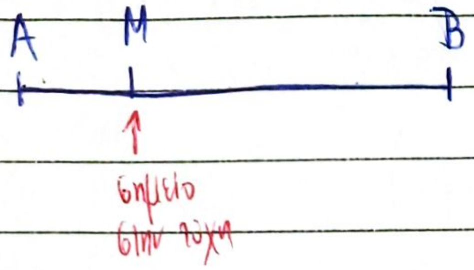
α) $= P(08{:}10 < X < 08{:}15) + P(08{:}25 < X < 08{:}30) = \frac{1}{3}$

$\int_{8:10}^{9:15} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{6}$ $\qquad F_X(8{:}15) - F_X(8{:}10)$ $\qquad + \int_{8:25}^{8:30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{6}$

β) $= P(8{:}00 < x < 8{:}05$ ή $8{:}15 < x < 8{:}20)$

$= \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \boxed{\frac{1}{3}}$

ΠΧ Ένα σημείο εκλέγεται στην τύχη πάνω σε ευθυγρ. τμήμα μήκους l.



P(το πηλίκο του μικρότερου προς το μεγαλύτερο τμήμα στο οποίο το σημείο χωρίζει το ευθ. τμήμα είναι μικρότερο από 1/4) $= P\left(\frac{x}{l-x} < \frac{1}{4}\right) = P(4x < l-x)$

$= P(5x < l) = P\left(X < \frac{l}{5}\right) = \int_0^{l/5} f_X(x)\,dx$

$F_X\left(\frac{l}{5}\right) = \frac{2}{5}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $AM < MB$

Έστω X η απόσταση του M από το A

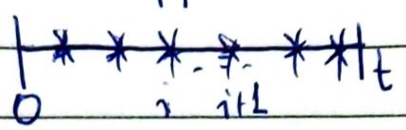
Τότε $X \in (0, l/2)$ άρα $X \sim U(0, l/2)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{l/2} = \frac{2}{l}, & 0 < x < l/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή

Έστω διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$

αφίξεις Poisson



Έστω $N(t)$ παριστάνει το πλήθος των αφίξεων (*) στο διάστημα $(0,t)$

Τότε $N(t) \sim P(\lambda t)$, $\lambda > 0$

$$P_{N(t)}(r) = P(N(t) = r) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r}{r!}, \quad r = 0,1,2,\ldots$$

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το χρόνο X που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων στη διαδικασία Poisson (έστω X ο χρόνος μεταξύ των i και $i+1$ αφίξεων ή ο χρόνος μέχρι την 1η αφίξη)

Ο χρόνος X είναι τ.μ με τιμές $x \geq 0$

Άρα X συνεχής τ.μ. Ζητείται η κατανομή της τ.μ X

Στοχεύω στην ουρά της X

$$P\left(\begin{matrix} X > x \\ \text{για } x \geq 0 \end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών} \\ \text{αφίξεων είναι} > x\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{καμία αφίξη} \\ \text{σε χρόνο } x\end{matrix}\right)$$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{Το πλήθος των αφίξεων} = 0 \\ \text{σε χρόνο } x\end{matrix}\right) = P(N(x) = 0) = P_{N(x)}(0) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^0}{0!} = \boxed{e^{-\lambda x}}, \ x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x} \Rightarrow P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}}, \ x \geq 0$$

Για $x<0$ $\begin{pmatrix} \text{δεν έχει} \\ \text{νόημα} \end{pmatrix}$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Καταλήξαμε

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Επομένως,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι η f_X σ.π.π? Ναι

① $f_X(x) \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται εκθετική με παράμετρο λ $(\lambda > 0)$ αν το σύνολο τιμών της X είναι $x \geq 0$ και η σ.π.π της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολικά: $X \sim \text{Εκθ}(\lambda)$

SKAG